**CONCEPTOS TEÓRICOS SOBRE LA INTEGRAL DE RIEMANN**

**CONTENIDO:**

* [Introducción](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#introduccion)
* [Partición de un intervalo](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#particion)
* [Suma de Riemann superior e inferior](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#suma_superior_e_inferior)
* [Variación de las sumas de Riemann](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#tamano_sumas)
* [Integral de Riemann superior e inferior. Funciones Riemann-Integrables](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#integral_superior_e_inferior)
* [Caracterización de las funciones Riemann-Integrables](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#lema_riemann)
* [Sumas de Riemann](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#sumas_riemann)
* [Tipos de aproximación de la integral](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#tipos_aproximacion)
* [Funciones Riemann-Integrables](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#integral_f_continuas)
* [Teorema Fundamental del Cálculo](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#teorema_fundamental)
* [Evaluación de la integral: regla de Barrow](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#regla_barrow)
* [Integral de Riemann de funciones no positivas](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#no_positivas)
* [Propiedades de la integral de Riemann](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#propiedades_integral)
* [Aplicaciones](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#aplicaciones)

**Introducción**

Consideraremos una función real ***y = f(x)*** positiva y acotada, definida en el intervalo cerrado [a, b].

Se llama ***integral definida de la función f(x)http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/mayor_o_igual.gif0 entre a y b*** (los límites de integración), al área de la porción de plano limitada por la gráfica de la función, el eje X y las rectas paralelas *x = a* y *x = b*.

Comenzaremos con las definiciones de [suma superior](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#suma_superior) y [suma inferior](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#suma_inferior) de Darboux de una función definida en un intervalo [a,b], asociadas a una partición del mismo. Estas sumas son aproximaciones al área que queremos calcular.

Veremos algunas de sus propiedades, en particular las referentes a la relación entre ambas sumas y a su [comportamiento cuando se consideran particiones cada vez más finas](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#tamano_sumas) (que corresponderán a aproximaciones del área cada vez mejores). Estas propiedades nos garantizan la existencia del supremo de las sumas inferiores y del ínfimo de las sumas superiores, siendo estos valores las [integrales inferior y superior](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#integral_superior_e_inferior), respectivamente, de Darboux, en el intervalo [a,b].

Al ser f positiva en [a,b], estos valores nos proporcionan estimaciones, por debajo y por arriba del área encerrada por f en [a,b]. Se dirá que f es [integrable Darboux](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#integrable) en [a,b] si "ambas aproximaciones coinciden". La integral de Riemann se define de forma ligeramente diferente, a partir de [particiones evaluadas](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#sumas_riemann). La integral de Riemann y la de Darboux son equivalentes. Debido a este hecho nos referiremos como Integral de Riemann a todas ellas. En este caso se define la integral de f en el intervalo [a,b] como el valor común de las integrales inferior y superior.

Daremos el [criterio de integrabilidad de Riemann](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#lema_riemann) que nos permite estudiar la integrabilidad de una función sin necesidad de calcular las integrales superior e inferior. Esto nos permite hacer diferentes [tipos de aproximación](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#tipos_aproximacion) de la integral.

Entre las [propiedades](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#propiedades_integral) fundamentales de la integral veremos la linealidad, la monotonía y la aditividad respecto del intervalo.

Daremos también, uno de los resultados centrales de toda la Matemática, el [Teorema Fundamental del Cálculo](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#teorema_fundamental), que relaciona dos ramas centrales del Análisis: el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral. Así mismo, veremos la [regla de Barrow](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#regla_barrow) que permite calcular la integral de Riemann de una función integrable a partir de una primitiva de la función.

Algunas de las aplicaciones prácticas son el cálculo de límites de algunas sucesiones cuyos términos están formados por sumas con un número creciente de términos, métodos para calcular áreas, [longitudes de arcos de curva](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#longitud_curva), [áreas](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#area_revolucion) y [volúmenes de revolución](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#volumen_revolucion).

**Partición de un intervalo**

- Una **partición P del intervalo cerrado [a, b]** es un conjunto finito de puntos P = { x0, x1, x2, ..., xn} tal que:

a = x0 < x1 < x2 < ... < xn-1 < xn = b

- La diferencia máxima entre cualesquiera dos puntos consecutivos de la partición, se llama **norma de la partición**, y se denota por || *P* || , es decir:

|| *P* || = max {xj - xj-1 , j = 1 ... n}

- Un **refinamiento de la partición P** es otra partición P' que contiene todos los puntos de P y además otros puntos adicionales, también ordenados en orden de magnitud.

**Suma de Riemann superior e inferior.**

Sea P = { x0, x1, x2, ..., xn} una partición del intervalo cerrado [a, b] y *f* una función acotada definida en ese intervalo. Entonces:

* La **suma superior de f respecto de la partición P** se define así:

S(f, P) = http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/sigma_1_n.gifcj (xj - xj-1)   
donde cj es el supremo de f(x) en el intervalo [xj-1, xj].

* La **suma inferior de f respecto de la partición P** se define así:

I(f, P) = http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/sigma_1_n.gifdj (xj - xj-1)   
donde dj es el ínfimo de f(x) en el intervalo [xj-1, xj].

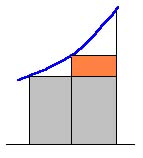
**Variación de las sumas de Riemann**

Sea P = { x0, x1, x2, ..., xn} una partición del intervalo cerrado [a, b] y *f* una función acotada definida en ese intervalo. Entonces:

* La suma inferior aumenta a medida que se van tomando refinamientos de la partición P, porque cada rectángulo se divide en otros de altura igual o superior, y el área siempre aumenta. Es decir:

I(f, P) http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menor_o_igual.gifI(f, P') para todo refinamiento P' de la partición P

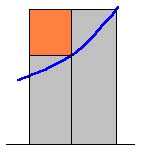
Gráficamente, se puede ver en color naranja el área que aumenta:



* La suma superior disminuye a medida que se van tomando refinamientos de la partición P, porque cada rectángulo se divide en otros de altura igual o inferior, y el área siempre disminuye. Es decir:

S(f, P') http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menor_o_igual.gifS(f, P) para todo refinamiento P' de la partición P

Gráficamente, se puede ver en color naranja el área que disminuye.



**Integral de Riemann superior e inferior. Funciones Riemann-Integrables**

Sea **f** una función acotada definida en un intervalo cerrado [a, b]. Se define:

* + la **integral superior** I\*( f ) = inf { S(f, P) : P es partición de [a, b] }
  + la **integral inferior** I\*( f ) = sup { I(f, P) : P es partición de [a, b] }

Entonces si I\*( f ) = I\*( f ) la función ***f es Riemann-Integrable*** y la integral de Riemann de f sobre el intervalo [a, b] se denota por:

http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.gif*f(x) dx*

Hay que destacar que las sumas superior e inferior dependen de la partición particular escogida, mientras que las integrales superior e inferior son independientes de las particiones elegidas. Sin embargo, esta definición es difícil para ser aplicada de forma práctica, pues es necesario conocer el ínfimo y el supremo sobre cualquier partición.

**Caracterización de las funciones Riemann-Integrables**

Supongamos que **f** es una función acotada definida en el intervalo cerrado [a, b]. Entonces **f es integrable Riemann** si y sólo si para todo http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/epsi.gif > 0 existe al menos una partición P tal que

| S(f, P) - I(f, P) | < http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/epsi.gif

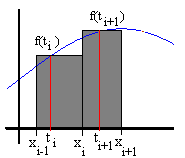
donde S(f, P) es [la suma superior de f respecto de la partición P](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#suma_superior), e I(f, P) es [la suma inferior de f respecto de la partición P](http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/teoria_integral.htm#suma_inferior)

**Sumas de Riemann**

- Si P = { x0, x1, x2, ..., xn} es una partición del intervalo cerrado [a, b] y ***f*** es una función definida en ese intervalo, entonces la **Suma de Riemann de *f* respecto de la partición P** se define como:

* *R(f, P) = http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/sigma_1_n.giff(tj) (xj - xj-1)*

donde tj es un número arbitrario en el intervalo [xj-1, xj].

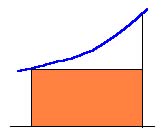


la suma de Riemann corresponde geométricamente con la suma   
de las áreas de los rectángulos con base *xj - xj-1* y altura *f(tj)*.

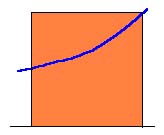
**Tipos de aproximación de la integral**

Por tanto, surge la duda de qué punto tj tomar dentro de cada subintervalo de la partición para evaluar la función en ese punto. En este sentido hay varias posibilidades para elegir el punto tj en el subintervalo [xj-1, xj], y las más utilizadas son éstas:

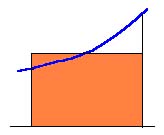
**- Punto izquierdo:** se toma como valor tj el límite inferior del subintervalo, es decir, xj-1. Gráficamente:



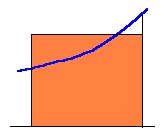
**- Punto derecho:** se toma como valor tj el límite superior del subintervalo, es decir, xj. Gráficamente:



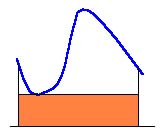
**- Punto medio:** se toma como valor tj el punto medio entre los límites del subintervalo, es decir, (xj-1 + xj) / 2. Gráficamente:



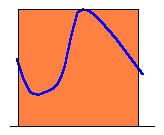
**- Punto aleatorio:** se toma como valor tj un punto elegido aleatoriamente entre todos los puntos del subintervalo. Gráficamente:



**- Punto ínfimo:** se toma como valor tj aquel punto del subintervalo tal que f(tj) es el ínfimo en ese subintervalo. Gráficamente:



**- Punto supremo:** se toma como valor tj aquel punto del subintervalo tal que f(tj) es el supremo en ese subintervalo. Gráficamente:



Los dos últimos tipos de aproximación no son útiles en la práctica, pues para aplicarlos sería necesario calcular el ínfimo o el supremo de f(tj), teniendo que recorrer todo el subintervalo. Pero esto no es necesario; ¿Por qué?

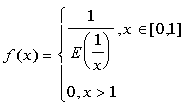
Si una función es Riemann-Integrable, podemos aproximar la integral por sumas de Riemann R(f,P) tomando tj como queramos.

Veamos esto: si la función es Riemann-Integrable, cualquier suma de Riemann R(f, P) tiende al valor de la integral, porque para cualquier punto tj tenemos que djhttp://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menor_o_igual.giff(tj)http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menor_o_igual.gifcj (siendo dj el ínfimo y cj el supremo en ese subintervalo), luego I(f,P)http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menor_o_igual.gifR(f,P)http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menor_o_igual.gifS(f,P).

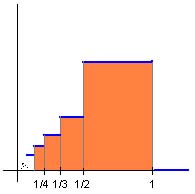
**Funciones Riemann-Integrables**

* *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable.*
* *Toda función continua y acotada en un intervalo cerrado y acotado, excepto en una cantidad numerable de puntos, es Riemann-Integrable.*
* *Recíprocamente, si una función acotada definida en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable, entoces es continua en ese intervalo excepto como mucho en una cantidad numerable de puntos.*
* *Toda función monótona y acotada en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable.*

Veamos un ejemplo de una función Riemann-Integrable no continua. Definamos la función:



La representación gráfica de esta función es:



Esta función es Riemann-Integrable, porque se pueden calcular las áreas de los rectángulos escalonados. Y sin embargo, no es continua en una cantidad numerable de puntos, es decir, en *1/n*, siendo *n* un número natural.

**Teorema Fundamental del Cálculo**

Sea f una función integrable definida en el intervalo cerrado y acotado [a, b], se define una nueva función:

*F(x) = http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_x.gif f(t) dt*

Entonces F es continua en [a, b]. Es más, si f es continua en un punto *c* del intervalo (a,b), entonces F es derivable en *c* y

F' (c) = f(c)

**Evaluación de la integral: Regla de Barrow**

Relaciona el Cálculo Integral con el Cálculo Diferencial.

Sea f una función Riemann-Integrable definida en el intervalo cerrado y acotado [a, b].

Y sea F una primitiva de f en [a, b], es decir, F' (x) = f (x) para todo x perteneciente a [a, b].

Entonces:

http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.giff(x) dx = F(b) - F(a)

**Integral de Riemann de funciones no positivas**

Hasta ahora se ha analizado la integral de funciones positivas. Para las funciones positivas, el valor de la integral coincide con el área que delimitan con el eje X y las rectas *x=a* y *x=b*

Se estudiarán en este punto las funciones no positivas.

Dada una función real no positiva definida en el intervalo [a,b], se puede descomponer en dos funciones f+(x) y f -(x) definidas así:

f+(x) = max { f(x), 0 }

f -(x) = max { -f(x), 0 }

Así, tenemos que ambas funciones son positivas y f se puede definir en base a ellas de esta manera:

**f(x) = f+(x) - f -(x)**

Así que el problema se reduce a calcular la integral de dos funciones positivas. Tenemos, por tanto, que:

http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.giff(x) dx = http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.giff+(x) dx - http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.giff -(x) dx

**Propiedades de la integral de Riemann**

Sean **f, g** funciones integrables Riemann definidas en el intervalo [a, b]. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

*1. Propiedades de linealidad:*

* http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.giff(x) dx  = http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menos_int_b_a.giff(x) dx
* Si c es un número real, entonces c f(x) es integrable en [a, b], y se cumple:

http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.gifc f(x) dx = c http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.giff(x) dx

* La función (f + g) (x) es integrable en [a, b], y se cumple:

http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.gif[f(x) + g(x)] dx = http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.gif f(x) dx + http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.gif g(x) dx

*2. Propiedad de aditividad respecto del intervalo:*

* Si a < c < b entonces http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.giff(x) dx = http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_c.giff(x) dx + http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_c_b.giff(x) dx

*3. Propiedades de monotonía:*

* Se cumple que | f | es integrable y:      | http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.giff(x) dx | http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menor_o_igual.gifhttp://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.gif | f(x) | dx
* Si g es otra función definida en [a, b] tal que 0http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menor_o_igual.gifg(x) http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menor_o_igual.giff(x) en [a, b], entonces http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.gifg(x) dx http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/menor_o_igual.gifhttp://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.giff(x) dx

**Aplicaciones**

Se muestran a continuación algunas de las aplicaciones prácticas de la integral de Riemann:

**- Cálculo de volúmenes de revolución:**

    Sea f una función real continua en [a, b], entonces el volumen de revolución engendrado al girar en torno al eje X, el recinto limitado por las rectas *x=a*, *x=b*, el eje X y la gráfica de f(x) viene dado por:

*V* = http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/pi.gifhttp://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/int_a_b.gif[ f(x) ]2 dx

**- Cálculo de la longitud de una curva:**

    Sea f una función real continua en [a,b], tal que su derivada f ' también es continua en [a,b]; entonces la longitud de la gráfica de f entre *x=a* y *x=b* es:

http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/longitud.gif

    En coordenadas paramétricas, una curva viene definida por la expresión:

http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/param.gif

    En este caso, la longitud de la curva viene dada por:

http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/curva_param.gif

**- Cálculo del área lateral de una superficie de revolución:**

    Sea f una función real continua en [a,b], tal que su derivada f ' también es continua en [a,b]; entonces el área lateral de revolución engendrada por f(x) al girar en torno al eje X, entre las rectas *x=a* y *x=b*, es:

http://www.dma.fi.upm.es/java/calculo/integracion/arearev.gif